Matematyka — idee i rzeczywistość

Jacek Chmieliński

Uniwersytet Trzeciego Wieku UP
20 marca 2014r.

Nie będę prowadził typowego wykładu matematycznego z rygorystycznym zapisem, definiowaniem pojęć, formułowaniem twierdzeń i ich dowodami. Będę się chciał podzielić pewnymi krótkimi refleksjami o matematyce.

Idee matematyczne tworzą się w wyobraźni matematyków. Nie istnieją one w rzeczywistym świecie, choć pomagają często w jego opisie. Z drugiej strony, wyobraźnia matematyków bywa inspirowana rzeczywistością.

Symbole matematyczne, jak liczby, przez wielu utożsamiane są z matematyką. A jednak nią nie są, podobnie jak nuty nie sa muzyką.

Większości ludzi matematyka kojarzy się z liczbami. Zazwyczaj jednak to skojarzenie ogranicza się do rachunków, a tymczasem struktura nawet najprostszych zbiorów liczbowych kryje w sobie znacznie więcej piękna i tajemnic.

Gdzie zatem należy szukać matematyki? Jak rodzą się idee matematyczne? Ile jest matematyki i czy istnieją jakieś jej granice? Jak weryfikować głoszone przez matematyków poglądy? Czy dowód twierdzenia może być zastąpiony doświadczeniem?

Co stymuluje rozwój matematyki? Choć ludzie zazwyczaj starają się unikać problemów, matematycy lubią je stwarzać. Niektóre z tych problemów, pięknie i czasem zadziwiająco prosto sformułowane, pozostają nierozwiązane przez dziesięciolecia a nawet stulecia.

Matematyka znajduje się gdzieś "między wyobraźnią a rzeczywistością", w świecie realnym i w świecie idei jednocześnie. Z jednej strony jest to wytwór ludzkiej wyobraźni, coś nierzeczywistego, ale z drugiej strony ta ludzka wyobraźnia inspirowana jest rzeczywistością, a i sam ogląd realnego świata pozwala dostrzec w nim wiele matematyki.

Wyobraźnia

Wyobraźnia ludzka daje możliwość oderwania się od rzeczywistości. Ale zazwyczaj ma z tą rzeczywistością dużo wspólnego. To co sobie chętnie wyobrażamy jest często po prostu jakimś wyidealizowanym, rzeczywistym obiektem. Pozbawionym wad lub wyposażonym w cechy, które w rzeczywistości nie mogły by się pojawić. Tak jak w rysunkach holenderskiego grafika Mauritsa Cornelisa Eschera, które pozornie odzwierciedlają rzeczywistość, wzbogacając ją jednak o nierealne efekty.

Matematyka opisuje obiekty istniejące jedynie w wyobraźni matematyków. Nie jest nauką opisującą rzeczywistość, choć może pomóc w zrozumieniu tego opisu. Pojęcia matematyczne, mniej lub bardziej abstrakcyjne i oderwane od rzeczywistości znajdują jednak często, czasem niespodziewanie, zastosowanie w tłumaczeniu świata realnego. Cytując noblistę, fizyka, E. Wignera można mówić o "niebywałej efektywności matematyki w naukach przyrodniczych, graniczącej wręcz z magią".

Opisywanie matematyki

Aby opisać swój świat matematyki, także kontaktując się między sobą, matematycy muszą odwoływać się do pewnej symboliki. Symbole matematyczne, a szczególnie liczby, znaki działań algebraicznych, pewne stałe matematyczne (jak π) niezawodnie skojarzą się każdemu z matematyką. Patrząc na tekst w języku perskim czy chińskim, od razu zorientujemy się, że dotyczy on matematyki. Same symbole matematyczne nie są jednak tym światem, tak jak nuty nie są muzyką.

Aby móc mówić o obiektach matematycznych trzeba je określić, zdefiniować. Ale wcześniej trzeba ustalić język porozumiewania się, sposób opisu, symbolikę. To wymaga dużego wysiłku i czasu. Bez tego nie da się jednak przebrnąć przez żaden tekst matematyczny. Nie da się wejść w świat matematyki. Matematyka jest nauką hermetyczną.

W większości przypadków przedstawiciele nauk humanistycznych mogą opowiedzieć o swoich zainteresowaniach laikom. Nawet jeśli wymaga to pewnych wyjaśnień, odejścia od szczegółów i kontekstów, to jest to możliwe. Z matematyką jest inaczej. Wyjaśnienie pewnych pojęć jest możliwe, pod warunkiem, że znamy pewne pojęcia bardziej podstawowe. Dlatego nie wyjaśnimy dziecku „w prosty sposób” co to jest różniczka funkcji. Najpierw musielibyśmy wyjaśnić na czym polegają przejścia graniczne, jeszcze wcześniej – co to jest funkcja, nie mówiąc o zbiorze liczb rzeczywistych.

Od rzeczywistości do idei matematycznej

Jak rodzą się idee matematyczne? Ponieważ powstają one w umysłach żywych istot ziemskich, na ich powstawanie ma wpływ rzeczywistość, choć nigdy nie wiadomo w jakim zakresie i według jakich związków.

Leonard Euler, genialny matematyk miał ponoć spacerować po swoim mieście Królewcu i zastanawiać się nad możliwością znalezienia takiej trasy spaceru, aby przejść przez wszystkie siedem mostów nie powtarzając żadnego. Rozwiązując ten praktyczny problem w głowie rodzą się idee grafów, problemu unikursalności (jednobieżności). Wspomniany problem okazuje się być problemem nie geometrycznym lecz jak możemy powiedzieć dzisiaj *topologicznym*. Zadanie Eulera o mostach królewieckich pojawia się zazwyczaj zawsze, gdy mówi się o początkach tej dyscypliny.

> Obok tej gałęzi geometrii, która jest związana z wielkościami i która zawsze skupiała uwagę badaczy, jest jeszcze inna gałąź, prawie nieznana, którą pierwszy zauważył Leibniz i nazwał geometrią położenia.
>
> L. Euler, *Solutio problematis ad geometria situs pertinentis* (1736).

Idee matematyczne w rzeczywistym świecie

Matematyka jest obecna w otaczającym nas świecie. Pojawia się, gdy chcemy wyjaśnić najprostsze obserwacje. Kiedy, jak małe dzieci, zadajemy pytanie: dlaczego? Dlaczego znalezienie czterolistnej koniczynki jest oznaką szczęścia? Bo jest rzadkim wyjątkiem; dużo łatwiej o trójlistną lub pięciolistną. Większość kwiatów ma po 3, 5, 8, 13, 21 płatków, stokrotka ma ich zazwyczaj 34, 55 lub 89. Patrząc na kwiat słonecznika zauważymy przecinające się dwie rodziny spiral: 34 spirale prawoskrętne i 55 lewoskrętnych (może być też, odpowiednio, 55 i 89 lub 89 i 144). Łuski ananasa układają się w rzędy pochylone w lewo i prawo; w jednym jest 8 łusek, w drugim 13. Zauważmy, że pojawiający się ciąg liczb: 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 itd. ma tę charakteryzującą go własność, że każda kolejna liczba jest sumą dwóch poprzednich. Dodajmy jeszcze, że ten ciąg pojawił się ok. 1200 roku u Leonarda Fibonacciego w jego badaniach nad wzrostem populacji królików. Stawiajmy dalsze pytania: dlaczego ślimaki mają muszle o spiralnych kształtach, jak zmieniać się będzie liczebność lisów i królików żyjących w jednym lesie i dlaczego tygrysy mają prążki, a lamparty plamki? Jeśli te pytania wydają się zbyt dziecinne, można zadawać bardziej poważne: po jakich torach krążą planety, dlaczego tak trudno przewidzieć pogodę, dlaczego serce, złożone z milionów niezależnych włókien, bije rytmicznie i dlaczego zdarzają się ataki serca? W odpowiedziach na te pytania, w dalece niebanalnych wyjaśnieniach tak nieraz pięknie prostych zależności, pojawia się matematyka. To ona ostatecznie wyjaśnia, dlaczego tak być musi. Obserwując wzrost rośliny zaobserwowano, że zawiązki, z których później powstają np. płatki, liście czy łuski, pojawiają się wzdłuż pewnej spirali. Kąt między kolejnymi zawiązkami jest taki sam (w przybliżeniu 137,5 stopnia) i jest on związany z pewną liczbą niewymierną, znaną od starożytności jako *złota liczba*. Stwierdzić można, że takie pojawianie się zawiązków gwarantuje ich „najlepsze upakowanie" oraz, w konsekwencji, wspomnianą liczebność płatków i łusek. Pojawiający się złoty kąt nie jest jednak "zapisany w genach" rośliny, ale jest wyłączną konsekwencją zasad jej dynamiki wzrostu. Matematyka może rozjaśnić wiele aspektów przyrody, których zwykle nie uważamy za matematyczne.

Żyjemy w świecie matematycznym. Myślę o świecie zastanym, o przyrodzie na naszej planecie i o tym, co wokół niej, ale także o świecie, który tworzymy sami. Brzmienie skrzypiec jest wynikiem wirtuozerii artysty, ale i konsekwencją praw, którym musi się poddać poruszona struna. Badania nad drgającą struną to dość odległa historia. Z biegiem czasu zaowocowały one zrozumieniem bardziej subtelnych drgań. Dlatego mamy radary na lotniskach i telewizory w domach. Ian Stewart, znany popularyzator matematyki, autor wielu książek (tłumaczonych także na język polski) napisał:

> *Żyjemy w świecie głęboko matematycznym, lecz tam, gdzie to jest możliwe, matematyka jest świadomie ukrywana, by uczynić nasz świat „przyjaznym dla użytkowników". Pewne idee matematyczne są jednak tak podstawowe, że nie można ich ukryć.*

Ile jest matematyki?

Rozwój matematyki jest praktycznie nieograniczony. Czasem ludzie zupełnie niezorientowani pytają: czy w matematyce można jeszcze coś nowego zrobić? Ktoś równie niezorientowany w kwestiach dźwięków mógłby to samo pytanie postawić w odniesieniu do muzyki. A jednak nikogo nie dziwi, że od tysięcy lat ludzie tworzą muzykę, a wciąż powstają nie tylko nowe piosenki czy koncerty, ale pojawiają się coraz to nowe gatunki muzyki, style.

Rozwój matematyki spowodował w pewnym momencie potrzebę jej podziału, klasyfikacji.

Klasyfikacja z 1868 roku obejmowała 12 dziedzin (Historia i filozofia, Algebra, Teoria liczb, Prawdopodobieństwo, Szeregi, Rachunek różniczkowy i całkowy, Teoria funkcji, Geometria analityczna, Geometria syntetyczna, Mechanika, Fizyka matematyczna, Geodezja i astronomia) i 38 poddziedzin. Klasyfikacja z 1979 roku zawierała 61 dziedzin i 3400 poddziedzin. Najnowsza klasyfikacja (z 2010 roku) zawiera blisko 100 dziedzin i ok. 6000 poddziedzin.

Oryginalne prace badawcze publikowane są w czasopismach naukowych. Na tzw. „liście filadelfijskiej" znajduje się blisko 200 czasopism matematycznych (tych najlepszych). Istniejące od 1940 roku czasopismo Mathematical Reviews (obecnie w formie elektronicznej bazy danych MathSciNet) podaje dane bibliograficzne i krótkie omówienia opublikowanych prac matematycznych. W chwili obecnej MR obejmuje swym działaniem ponad 2000 czasopism. Na liście skrótów wydawnictw seryjnych i czasopism (AMS) znajduje się ok 2500 tytułów! Do tego doliczyć należy rozmaite czasopisma lokalne, internetowe oraz publikacje na stronach internetowych autorów lub instytucji. Doliczyć należałoby też czasopisma z innych dziedzin nauki, w których publikowane są prace z zastosowań matematyki!

Wspomniane już Mathematical Reviews obecnie zamieszcza rocznie ok. 100 000 nowych publikacji, a cała baza danych MR zawiera już ponad 3 mln. pozycji. Indeks nazwisk w bazie MR zawiera ponad 700 tys. pozycji.

To może dać jakieś pojęcie o tym ile nowych faktów, mniej lub bardziej ważnych twierdzeń czy nowych zagadnień pojawia się każdego roku. Wystarczy uświadomić sobie, że każda praca zawiera przynajmniej jeden taki nowy wynik.

Podstawowe pojęcie matematyczne

Kiedy pyta się małe dzieci o to z czym kojarzy im się matematyka, to zdecydowana większość odpowiada, że z działaniami (dodawanie, odejmowanie mnożenie,dzielenie,...). Dopiero po dłuższych oczekiwaniach i domaganiu się innych skojarzeń pojawi się na przykład geometria. Pojęcie działania, a dokładniej zbioru z określonym w nim działaniem czy działaniami, czyli struktury algebraicznej nie należy wcale do najbardziej elementarnych pojęć matematycznych. Oczywiście dzieci niekoniecznie mają na myśli takie struktury. Raczej dostrzegały praktyczne zastosowania czyli codzienne rachunki.

Ale jeśli nie strukturę algebraiczną, to jakie pojęcie należałoby uznać za najbardziej charakterystyczne i podstawowe dla matematyki? Jak zwykle w przypadku takiego typu pytań nie należy spodziewać się łatwej i oczywistej odpowiedzi. Być może za takie należałoby uznać pojęcie liczby. Dzieci mówiąc o działaniach najwyraźniej miały na myśli działania w jakimś zbiorze *liczbowym.* Bo cóż innego można (według dzieci), na przykład, dodawać. Czy zbiory liczbowe są rzeczywiście takim podstawowym pojęciem? Niekoniecznie - historia matematyki wskazuje że w różnych kulturach różnie sobie z tym radzono. I trochę czasu musiało upłynąć. Ale z pewnością liczby, obok pojęć geometrycznych, pewnych zbiorów i funkcji, należą do najbardziej rozpoznawalnych obiektów matematycznych. I rzeczywiście, wielu matematyków zgodziło by się uznać liczby za symbol matematyki. Co jednak istotne, ta zbieżność poglądów matematyków i reszty społeczeństwa jest trochę pozorna. Przeciętnemu człowiekowi owa liczba (a często cała matematyka) kojarzy się bardziej z liczeniem niż z myśleniem.

Jedną z najstarszych i, w pewnym sensie, najszlachetniejszych dyscyplin matematycznych jest teoria liczb; teoria, zajmująca się w zasadzie wyłącznie liczbami naturalnymi. Jeden z największych matematyków w historii, Carl Friedrich Gauss, powiedział *Jeśli matematyka jest królową nauk, to królową matematyki jest teoria liczb.*

Liczby pierwsze

Liczba pierwsza to taka liczba naturalna, która dzieli się (bez reszty) tylko przez 1 i przez siebie. Takich liczb jest nieskończenie wiele (pokazał to już Euklides) ale nie ma jakiegoś wzoru pozwalającego wskazywać te liczby. Znany od 1845 roku tzw. *postulat Bertranda* mówi, że dla każdej liczby naturalnej n, miedzy liczbami n i $2n$ znajduje się liczba pierwsza. Wykazał to w 1850 roku Czebyszew, a w XX wieku Paul Erdös wykazał, że między n a $2n$ znajdzie się dowolnie dużo liczb pierwszych, o ile tylko n jest odpowiednio duże.

Wykazanie, że jakaś duża liczba jest liczbą pierwszą może być bardzo kłopotliwe (nawet dla mocnych komputerów). Od czasu do czasu można usłyszeć, że znaleziono "największą liczbę pierwszą". Oczywiście jest to tylko największa potwierdzona liczba pierwsza, bo na pewno istnieją większe od niej. Zresztą, nawet i to nie jest pewne — może znane są już większe liczby pierwsze ale trzymane są w sekrecie (liczby pierwsze znajdują zastosowanie w szyfrowaniu). Mamy rok 2014 i jak nietrudno zauważyć nie jest to liczba pierwsza. Podobnie jest z liczbą 2013 - suma liczb użytych do jej zapisu wynosi 6 i dzieli się przez 3, a zatem sama liczba 2013 dzieli się przez 3. Liczbą pierwszą jest na przykład 2011 (czego wcale nie widać, ale do sprawdzenia nie potrzeba superkomputera, wystarczy cierpliwie dzielić przez kolejne liczby pierwsze 2,3,5,7,..., 47 i dalej już nie trzeba bo wynik dzielenia jest mniejszy niż liczba przez którą dzielimy). Kolejne liczby pierwsze to 2017, 2027, 2029 (te dwie ostatnie to tak zwane liczby pierwsze bliźniacze – są to kolejne liczby nieparzyste.

Każdą liczbę naturalną możemy w jednoznaczny sposób przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych. Mówimy o "rozkładzie na czynniki pierwsze". Liczba 10 rozkłada się na czynniki 2 i 5, 100 rozkłada się na 2, 2, 5, 5.

A czy na przykład liczba 16 682 216 938 421 (16 bilionów 682 miliardy 216 milionów 938 tysięcy 421) jest liczbą pierwszą czy złożoną? Jeśli złożoną, to jak jest jej rozkład na czynniki pierwsze? Odpowiedź na to pytanie nie była by już taka łatwa. Tyle, że ja tej liczby sobie ot tak nie wymyśliłem. Uzyskałem ją mnożąc przez siebie (co oczywiście nie stanowi większego problemu) cztery liczby pierwsze: 2011, 2017, 2027 i 2029. Mamy więc

$$16\,682\,216\,938\,421 = 2011 \cdot 8\,295\,483\,311 = 2011 \cdot 2017 \cdot 2027 \cdot 2029.$$

To nam uświadamia dość oczywisty fakt. Pomnożyć kilka liczb (nawet dużych) przez siebie jest łatwo. Odwrócić ten proces, to znaczy rozłożyć iloczyn na czynniki - znacznie trudniej. I to pokazuje, oczywiście w jakimś wielkim uproszczeniu, ideę szyfrowania. Latwo zaszyfrować, trudno rozszyfrować.

Jednak liczby 2011, 2017, 2027 i 2029 nie są zbyt duże. Chcąc utrudnić rozkład (zwłaszcza mając świadomość użycia do pomocy komputerów) mógłbym je zastąpić jakimiś większymi. Milionową liczbą pierwszą jest 15 485 857. Ale to też nie jest szczególnie duża liczba. Jaka jest nawiększa dotychczas znana? Przynajmniej oficjalnie.

25 stycznia 2013 roku Curtis Cooper - uczestnik projektu GIMPS (Great Internet Mersen Prime Search) odkrył, że $2^{57885161} - 1$ jest liczbą pierwszą. Liczby postaci $2^n - 1$ noszą nazwę liczb Mersenna. Niektóre z nich są liczbami pierwszymi (n musi wtedy też być liczbą pierwszą). Liczba odkryta przez Coopera jest 48. (znaną) liczbą pierwszą Mersenne'a. To naprawdę duża liczba. Co prawda udało się ją zapisać przy użyciu raptem 10 cyfr, ale gdybyśmy chcieli zapisać ją w tradycyjnym dziesiątkowym systemie pozycyjnym potrzebowalibyśmy już 17 425 170 cyfr. Przyjmując, że znormalizowana strona zawiera 1 800 znaków, zapisując tę liczbę potrzebowalibyśmy około 10 000 stron.

Dowód

Istotą matematyki jest weryfikowalność. Matematyk ma ten komfort, że nie musi odwoływać się do autorytetów. Może sam weryfikować swoje hipotezy. Zdanie matematyczne jest prawdziwe albo fałszywe i ta jego wartość logiczna nie ulega zmianie i wpływom ludzi.

Odpowiednio przygotowany czytelnik tekstu matematycznego jest w stanie przekonać się do głoszonych przez autora tez. Nie ze względu na szacunek, jakim może darzyć autora, ale ze względu na zaprezentowane przez niego wnioskowanie. Postawiona hipoteza nie jest faktem matematycznym, póki nie można jej udowodnić lub obalić wskazując odpowiedni kontrprzykład. Uczenie w szkole o związku między kwadratami długości boków trójkąta nie jest wpajaniem "jedynie słusznego" poglądu głoszonego przez Pitagorasa. Kiedy uczeń poznaje dowód tego twierdzenia, może mieć wspaniałe poczucie odkrycia pewnej prawdy obiektywnej. Prawdy, której może sam bronić.

Dowody matematyczne bywają różne. Jeśli twierdzenie mówi np. o istnieniu pewnego obiektu matematycznego (o zadanych własnościach), to najbardziej przekonywującym dowodem jest wskazanie przykładu. Mówimy wtedy o dowodzie konstruktywnym. Często jednak matematycy stosują metodę zwaną *dowodem nie wprost*. Przypuszczamy wówczas, że dany obiekt nie istnieje, a następnie wykazujemy, że takie przypuszczenie prowadzi do sprzeczności z faktami zakładanymi lub wykazanymi wcześniej.

Podobną metodę stosujemy w poniższym przykładzie.

TWIERDZENIE *Istnieją dwie liczby niewymierne a i b, takie, że liczba a^b jest wymierna.*

Dowód: Weźmy liczbę

$$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}.$$

Jeśli jest to liczba wymierna to, że odpowiedź na nasze pytanie jest pozytywna; wystarczy przyjąć $a = b = \sqrt{2}$.

Jeśli zaś liczba x jest niewymierna, to biorąc $y = \sqrt{2}$ otrzymany

$$x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

□

Zauważmy, że twierdzenie zostało wykazane, żądane liczby istnieją, ale nie umiemy ich wskazać. Dla zaspokojenia ciekawości mogę powiedzieć, że liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest niewymierna (co nie jest jednak takie oczywiste).

W matematyce liczą się nawet małe wyjątki. Gdy uznamy np., że wszystkie liczby zachowują się w określony sposób, a istnieje jedna, która tak nie robi, to nie mamy racji. Nieprawdziwe może się również wówczas okazać wszystko to, co tego twierdzenia wywiedliśmy.

Problemy

Problemy. Czy to słowo dobrze się kojarzy? Chyba nie. W życiu staramy się raczej *unikać* problemów. Nie zawsze się to udaje, czasami *pojawiają* się problemy. Niechciane problemy. Wtedy szukamy rozwiązań. Raczej sami problemów sobie nie stwarzamy, chyba, że nieświadomie. *Stawiać problem* to zwrot, który w potocznym języku pojawia się raczej rzadko[1]. Również w nauce problemy na ogół już są (co nie oznacza oczywiście, że ich dostrzeżenie jest oczywiste). Rolą naukowców jest rozwiązać je doprowadzając do lepszego poznania bądź praktycznych zastosowań.

W matematyce jest inaczej. Matematyka jest tworzona przez matematyków. Jej rozwój zależy od pomysłowości i odpowiedniego stawiania problemów. Jeśli stworzymy jakąś "teorię", w której nie ma interesujących problemów (albo są tylko trywialne), to nie będzie z niej żadnego pożytku. Umiejętnie sformułowany problem: interesujący, nietrywialny, niezależny i w miarę elementarnie, w ramach danej teorii, postawiony zazwyczaj pozytywnie wpływa na rozwój teorii. Uwidacznia jej niedostatki lub wskazuje na jakieś możliwe praktyczne zastosowania. Często do rozwoju teorii matematycznej przyczynia się nie samo rozwiązanie problemu, co jego rozwiązywanie. Dzięki próbom rozwiązania problemu (nawet tym nieskutecznym) pojawiają się nowe metody badawcze, nowe obiekty, nowe teorie. Rozwiązanie

[1] W Narodowym Korpusie Języka Polskiego (http://www.nkjp.uni.lodz.pl/), w wyszukiwarce kolokacji słowo "stawiać" jako kolokacja do problem pojawia się dopiero na 146 miejscu, na pierwszych miejscach są: polegać, poważny, alkoholowy, tkwić, rozwiązać.

problemu zamyka ten płodny okres, choć zazwyczaj przy okazji pojawiają się nowe problemy. „Dobry” problem opiera się zazwyczaj istniejącym metodom i zmusza do poszukiwania nowych, a jego rozwiązanie daje nadzieje na istotny postęp w rozwoju danej dziedziny. Dlatego o ile w codziennym życiu staramy się raczej unikać osób, które stwarzają problemy, w matematyce takie osoby traktujemy jak bohaterów.

Problemy towarzyszyły matematyce od zarania. Klasyczne trzy problemy matematyki greckiej: podwojenia sześcianu, trysekcji kąta i kwadratury koła — to przykłady takich właśnie dobrych problemów.

Kwadratura koła

Postawiony w starożytności problem *kwadratury koła*, czyli skonstruowania przy użyciu klasycznych przyrządów (cyrkla i linijki) koła, którego pole byłoby równe polu danego kwadratu, był, jak się okazało, problemem niemożliwym do rozwiązania. Stawiający problem zapewne wierzył (wierzyli), że taka konstrukcja istnieje. Okazało się inaczej, ale zanim się to okazało w wyniku prób rozwiązania powstało wiele ciekawych wyników, rozmaitych konstrukcji przybliżonych (w tym XVII wieczna konstrukcja Polaka Adama Kochańskiego). Już w XVII wieku pojawiła się próba wykazania, że taka konstrukcja nie istnieje, ale wykazano to dopiero pod koniec XIX wieku. Gdyby konstrukcja była możliwa do wykonania, liczba π musiałaby dać się przedstawić jako rozwiązanie pewnego równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych. Inaczej mówiąc liczba π musiałaby być tzw. *liczbą algebraiczną*. W 1768 Lambert wykazał, że liczba π jest niewymierna, ale to mało ($\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną ale każdy wie jak ją skonstruować). Dopiero w 1882 Lindemann wykazał, że π nie jest liczbą algebraiczną, czyli jest tzw. *liczbą przestępną*.

To taki typowy przykład pięknego problemu. Prosty w sformułowaniu, łatwy do zrozumienia nawet przez niematematyków. Nietrywialny i brzemienny w nowe osiągnięcia matematyczne poprzedzające jego rozwiązanie.

Twierdzenie Fermata

Wróćmy do teorii liczb i problemów jakie się w niej rozważa. Wiele z nich mimo prostoty i elegancji sformułowania kryje w sobie niezwykle trudne zadania do rozwiązania. Wielu problemów nie udało się rozstrzygnąć najwybitniejszym matematykom, często przez już nie dziesiątki, ale setki lat. Zapewne najbardziej znanym przykładem takiego problemu jest wielkie twierdzenie Fermata. Ma ono niezwykle proste sformułowanie.

> Dla naturalnego wykładnika $n > 2$ nie istnieją takie liczby naturalne x, y, z, dla których
> $$x^n + y^n = z^n.$$

(Istotne jest założenie, że $n > 2$; dla $n = 2$ oczywiście bez trudu takie trzy liczby znajdziemy. Są to tzw. *trójki pitagorejskie*. Najprostszy przykład to $3, 4, 5$. Mamy bowiem $3^2 + 4^2 = 5^2$.)

Francuski prawnik i matematyk-amator Pierre de Fermat (1601-1665) sformułował powyższą hipotezę w roku 1637 podczas lektury przetłumaczonego zaledwie kilka lat wcześniej na łacinę greckiego dzieła *Arytmetyka* Diofantosa. Twierdzenie Fermata opublikowano w 1670 roku, już po jego śmierci. Fermatowi udało się uzasadnić swą hipotezę dla $n = 4$ i wyraził przypuszczenie, że ta metoda pozwoli na uzasadnienie w dowolnym przypadku $n > 2$. Słynna jest notatka umieszczona na marginesie książki Diofantosa: *Jest niemożliwe rozłożyć sześcian na dwa sześciany, czwartą potęgę na dwie czwarte potęgi i ogólnie potęgę wyższą niż* *druga na dwie takie potęgi; znalazłem naprawdę zadziwiający dowód tego, jednak margines jest za mały, by go pomieścić.*

Przez ponad 300 kolejnych lat wielcy matematycy (a także różni amatorzy) próbowali znaleźć ten zadziwiający dowód. Leonard Euler podał dowód dla $n = 3$, a Dirichlet dla $n = 5$. Kolejne dowody, na gruncie teorii liczb oraz późniejsze dowody numeryczne przesuwały n, dla których twierdzenie zostało udowodnione. Wśród kontrubutorów można znaleźć nazwiska największych matematyków: Legendre'a, Lebesgue'a, Kroneckera, Hilberta a także jednej z największych matematyczek Sophie Germain.

W czasach bardziej współczesnych pojawiło się wiele hipotez związanych z teoriami odległymi od teorii liczb jak topologia czy teoria krzywych eliptycznych. Odkryto też, że hipotezy te pozostają w związku z twierdzeniem Fermata. To znaczy ich udowodnienie oznaczałoby również prawdziwość twierdzenia Fermata. Jedną z największych matematycznych sensacji ostatnich lat był dowód owej hipotezy podany przez angielskiego matematyka Andrew Johna Wilesa w roku 1994. Wynik został opublikowany w roku 1995 w Annals of Mathematics.

Matematyczne Noble i inne nagrody

Jak dla wszystkich ludzi nauki, także dla matematyków osiąganie oryginalnych wyników, w tym znajdowanie odpowiedzi na stawiane przez siebie samych lub innych pytania, jest głównym celem ich pracy. Zazwyczaj matematycy są zatrudniani przez uniwersytety, instytuty badawcze lub otrzymują stypendia czy granty. Można więc powiedzieć, że z uprawiania matematyki żyją.

Ale, jak w każdej działalności, pewne osiągnięcia zasługują na szczególne uznanie i wyróżnienie. Stawiane problemy, zwłaszcza gdy długo opierają się rozwiązaniu zyskując przez to na znaczeniu, same w sobie motywują do zmagania się z nimi. Rozwiązanie problemu może dostarczyć wystarczająco dużo satysfakcji, że żadne nagrody nie są jej w stanie przebić. Jednak zazwyczaj matematycy bywają ludźmi i lubią także rywalizację, konkursy i nagrody. Tych w historii matematyki można odnaleźć całkiem sporo.

Przykładem dość znanej nagrody, związanej z jednym konkretnym problemem - Wielkim Twierdzeniem Fermata - była nagroda ustanowiona przez Paula Wolfskehla. Ten zainteresowany matematyką przemysłowiec z Darmstadtu w swoim testamencie w 1906 roku zapisał 100 000 złotych marek za znalezienie poprawnego dowodu twierdzenia. Niestety nagroda uległa inflacji. Przeliczając jej wartość na złoto, jej obecna wartość powinna wynosić ok 1 mln funtów. Tymczasem gdy została wręczona A. Wilesowi w 1997 jej wartość wynosiła tylko 30 tysięcy funtów.

Powszechnie znanym wyróżnieniem przyznawanym ludziom nauki jest Nagroda Nobla. Ale Nobla w matematyce ... nie ma (są zresztą różne teorie na temat pominięcia matematyki przez Alfreda Nobla). Są jednak inne nagrody.

Medal Fieldsa i nagroda Abela

Medal Fieldsa - jest nagrodą przyznawaną raz na 4 lata zazwyczaj 3-4 uczonym za wyniki, które miały największy wpływ na rozwój matematyki. Ufundowany został w 1932 przez kanadyjskiego matematyka Johna Charlesa Fieldsa. Przyznawany jest od 1936, z przerwą wojenną. Medal Fieldsa bywa nazywany "matematycznym noblem" choć od tej nagrody sporo go różni. Tryb przyznawania (raz na 4 lata), związana z nim nagroda finansowa (kwota 15 000 dolarów kanadyjskich nie jest porównywalna z nagrodą nobla). Istotną różnicę wprowadza przede wszystkim zasada, że Medal przyznawany jest wyłącznie młodym matematykom (którzy nie ukończyli 40 lat do 1 stycznia roku, w którym jest nadawany).

Medal przyznaje komitet powoływany co 4 lata przez Międzynarodową Unię Matematyczną, wręczany jest podczas międzynarodowych kongresów matematycznych.

Od niedawna istnieje też, pod pewnymi względami, lepszy odpowiednik Nagrody Nobla: Nagroda Abela – przyznawana w dziedzinie matematyki przez króla Norwegii. Ustanowiona została w dwusetną rocznicę urodzin wybitnego matematyka Nielsa Henrika Abela, w roku 2001. Rząd Norwegi przeznaczył 200 milionów koron norweskich (około 25 milionów dolarów) na Fundację Abela, która wypłaca nagrody. Wartość Nagrody Abela wynosi obecnie 980 000 dolarów amerykańskich (podonie jak Nagroda Nobla). Ponadto Nagroda Abela przyznawana jest co roku i nie istnieje ograniczenie wiekowe dla laureatów.

Sam fizyczny „medal Fieldsa" wykonany jest ze złoconego metalu i ma zaledwie 7,5 cm średnicy. Na rewersie widnieje napis *Congregati ex toto orbe mathematici ab scripta insignia tribuere* (Zebrani z całego świata matematycy honorują wielkie osiągnięcia). Na medalu umieszcza się nazwisko laureata, ale bez kraju pochodzenia czy macierzystej uczelni laureata.

Na awersie widzimy głowę Archimedesa i cytat z rzymskiego poety Maniliusza, którym zakończę ten wykład:

> *Transire suum pectus mundoque potiri*
> (Wznieść się ponad granice ludzkich możliwości i przewodzić światu).